ECUACIONES DIFERENCIALES

FISICA COMPUTACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

14 de mayo de 2020

Métodos de solución

- Método de Euler
- Método de la serie de Taylor
- Métodos de Runge-Kutta (de segundo y cuarto orden)
- Ecuaciones diferenciales de orden superior y sistemas de ecuaciones
- Método de disparo lineal (problemas con valores a la frontera)

Planteamiento del problema

- La forma más general de una ecuación diferencial de primer orden es:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

con una condición $y(a)=y_{ini,}$ donde f es una función de dos variables, la variable independiente t y la función y(t)

Una solución numérica consiste en obtener valores aproximados de la función y en un conjunto discreto de valores de t en un intervalo [a,b]

Método de Euler

- Una forma de escribir la ecuación diferencial de la página anterior es usando límites:

$$\lim_{h\to 0}\frac{y(t+h)-y(t)}{h}=f(t,y(t))$$

El método de Euler se obtiene al quitar el límite de la ecuación, es decir:

$$\frac{y(t+h)-y(t)}{h}=f(t,y(t))$$

De esta ecuación se despeja y(t+h)

$$y(t+h) \approx y(t) + f(t, y(t)) \cdot h$$

Vamos a considerar un conjunto de puntos dados por la relación:

$t_i = a + ih$, con i=0,1,2,…,n y h=(b-a)/n

Definimos $y_i = y(t_i)$. Si hacemos $t=t_i$, la ecuación previa se convierte en:

$$y_{i+1} \approx y_i + f(t_i, y_i) \cdot h$$

El método de Euler consiste en cambiar el símbolo de aproximado por una igualdad:

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i) \cdot h$$

con la condición inicial $y_0 = y_{ini}$

- Tomando valores de i=0,1,2,…,n-1 se obtienen valores aproximados de las solución en los puntos t_i

EJEMPLO 1

Calcular la solución numérica de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = t^2 - y$$

con la condición inicial y(0)=1, en el intervalo [0,3] con n=150. Además comparar el resultado con la solución analítica:

$$y(t) = -e^{-t} + t^2 - 2t + 2$$

EJEMPLO 2

Resolver la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2x$$

con las condiciones iniciales x(0)=1.2 y x'(0)=0, en el intervalo [0,15] y

h=0.05 y luego reducir el paso a h=0.01

- La ecuación diferencial se convierte en dos ecuaciones diferenciales de primer orden. Para lo cual se definen dos funciones:

$$\mathrm{y}(t) = x(t)$$

$$\mathrm{z}(t) = \frac{dx}{dt}$$

- El problema a resolver es un sistema de dos ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy}{dt} = z$$

$$\frac{dz}{dt} = -2y$$

con las condiciones $y(0) = 1.2, \quad z(0) = 0$. El método de Euler nos conduce a dos relaciones de recurrencia

$$y_{i+1} = y_i + z_i \cdot h$$

$$z_{i+1} = z_i - 2y_i \cdot h$$

Método de la serie de Taylor

- Se tiene la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

con la condición: $y(a)=y_{ini,}$

Si se conoce el valor de y(t) es posible calcular el valor la función y en t+h mediante una expansión en serie de Taylor:

$$y(t+h) \approx y(t) + y'(t)h + y''(t)\frac{h^2}{2} + \cdots + y^{(p)}(t)\frac{h^p}{p!}$$

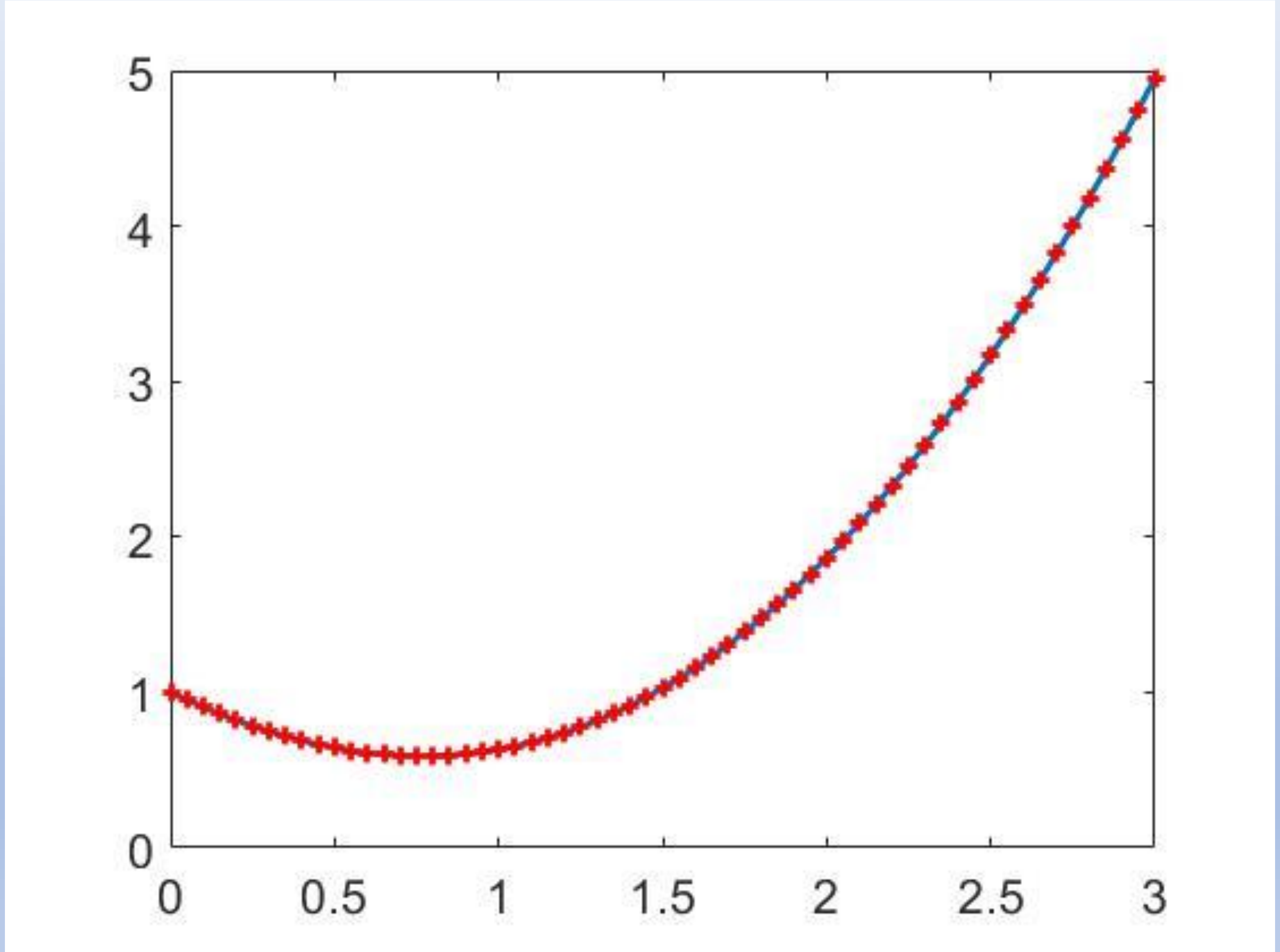
- Los valores de las derivadas se pueden calcular usando la ecuación diferencial.

PROBLEMA:

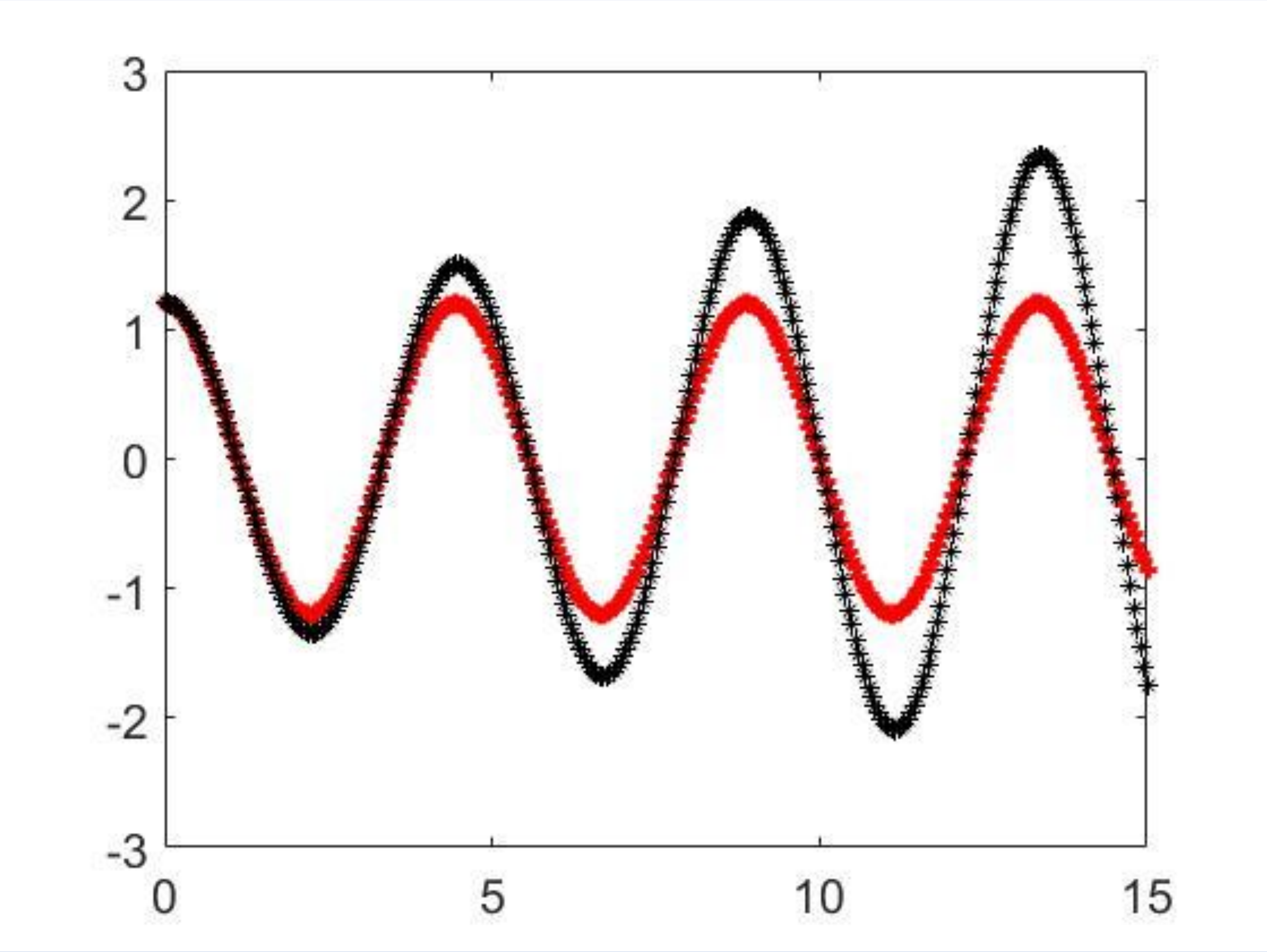
Resolver las dos ecuaciones diferenciales (páginas 6 y 7) con una expansión a orden 4 (p=4).

RESULTADOS

- Primera ecuación



- Segunda ecuación:



- PROBLEMA 3

Resolver el problema del péndulo simple:

$$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgsen(\theta)$$

con las condiciones iniciales $\theta(0) = 45\ grados\ y\ \theta'(0) = 0$

Usar métodos de Euler y de la serie de Taylor a orden 4

L=0.5 m, g=9.8 m/s**2

- PROBLEMA 4

Ecuación de la gravitación universal:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -G\,\frac{m\,M}{r^2}\,\hat{r}$$

Resolver esta ecuación diferencial para el caso del movimiento planetario. Demostrar que las trayectorias pueden ser elipses, parábolas o hipérbolas

- En coordenadas polares la anterior ecuación (luego de cierto cambio de unidades) se convierte en dos ecuaciones:

$$r'' = \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^2}$$

$$\theta' = \frac{1}{r^2}$$

Resolver con r(0)=1.0, r'(0)=0.2, Ɵ(0)=0

y con r(0)=1.0, r'(0)=1.1, Ɵ(0)=0

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

$$u'' + [\cos(x) + cos^2(x)]u = \exp(-1 + \cos(x))$$

en el intervalo [0,20] con h=0.01. u(0)=1, u'(0)=0

$$y'' = -\frac{4}{x}y' + \frac{2}{x^2}y - \frac{2}{x^2}\ln(x)$$

en el intervalo [1,2] con h=0.01. y(1)=-1/2, y(2)=ln(2)

- Sistema de ecuaciones equivalente

- $y' = z$
- $z' = -\frac{1}{x}z + \frac{2}{x^2}y - \frac{2}{x^2}\ln(x)$

en el intervalo [1,2] con h=0.01. y(1)=-1/2, y(2)=ln(2)

- Resolver la siguiente ecuación diferencial (ecuación de Blasius de la teoría de capa límite laminar)

$$y''' + \frac{1}{2}yy'' = 0$$

con las condiciones de frontera y(0)=y'(0)=0 , y'(∞)=1

Úsese el método modificado de Euler (que es un método de Runge-Kutta de segundo orden)

Ecuaciones:

$$y' = z$$
$$z' = w$$
$$w' = -\frac{1}{2}yw$$

con y(0)=z(0)=0 y z(∞)=1

METODOS DE RUNGE KUTTA DE SEGUNDO ORDEN

- Comenzamos con la fórmula del método de la serie de Taylor a orden 2:

$$y(t+h) \approx y(t) + h\left(y'(t) + y''(t)\frac{h}{2}\right)$$

Vamos a aproximar el término entre paréntesis con :

$$T_2 = Af_0 + Bf_1$$

donde $f_0 = f(t, y)$ $\quad y \quad$ $f_1 = f(t + Ph, y + Qhf_0)$

- El término entre paréntesis se escribe como sigue:

$$f(t,y) + (\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) \cdot f(t,y))\frac{h}{2}$$

Hágase un desarrollo en serie de Taylor de T_2 a primer orden en ambas variables. El resultado es:

$$T_2 \approx Af_0 + B\left(f_0 + \frac{\partial f}{\partial t}Ph + \frac{\partial f}{\partial y}f_0Qh\right)$$

$$T_2 \approx (A+B)f_0 + \frac{\partial f}{\partial t}BPh + \frac{\partial f}{\partial y}f_0BQh$$

- Se identifican términos en ambas expresiones con lo que se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$A + B = 1$$

$$BP = \frac{1}{2}$$

$$BQ = \frac{1}{2}$$

Se tienen 3 ecuaciones y cuatro incógnitas. Estamos en la libertad de darle a una de ellas un valor arbitrario

- METODO DEL PUNTO MEDIO

A=0, B=1, P=1/2, Q=1/2

$$y(t+h) \approx y(t) + hf\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t, y)\right)$$

Considérese

$$y_i = y(t_i) \qquad y \quad t_i = a + i \cdot h$$

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(t_i, y_i)\right)$$

- METODO MODIFICADO DE EULER

A=1/2, B=1/2, P=1, Q=1

$$y(t+h) \approx y(t) + \frac{h}{2}\left[f(t,y) + f\big(t+h, y+hf(t,y)\big)\right]$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(t_i, y_i) + f(t_i + h, y_i + hf(t_i, y_i))]$$

- METODO DE HEUN

A=1/4, B=3/4, P=2/3, Q=2/3

$$y(t+h) \approx y(t) + \frac{h}{4}\left[f(t,y) + 3f\left(t + \frac{2}{3}h, y + \frac{2}{3}hf(t,y)\right)\right]$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}\left[f(t_i,y_i) + 3f\left(t_i + \frac{2}{3}h, y_i + \frac{2}{3}hf(t_i,y_i)\right)\right]$$

METODO DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$
$$k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right)$$
$$k_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right)$$
$$k_4 = f(t_i + h, y_i + hk_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, z)$$

$$\frac{dz}{dt} = g(t, y, z)$$

¿Cómo se implementa el método de Runge-Kutta de cuarto orden?

$$k_1 = f(t_i, y_i, z_i) \qquad l_1 = g(t_i, y_i, z_i)$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1, z_i + \frac{h}{2}l_1\right) \qquad l_2 = g\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1, z_i + \frac{h}{2}l_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2, z_i + \frac{h}{2}l_2\right) \qquad l_3 = g\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2, z_i + \frac{h}{2}l_2\right)$$

$$k_4 = f(t_i + h, y_i + hk_3, z_i + hl_3) \qquad l_4 = g(t_i + h, y_i + hk_3, z_i + hl_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{h}{6}[l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4]$$