Ecuaciones diferenciales parciales

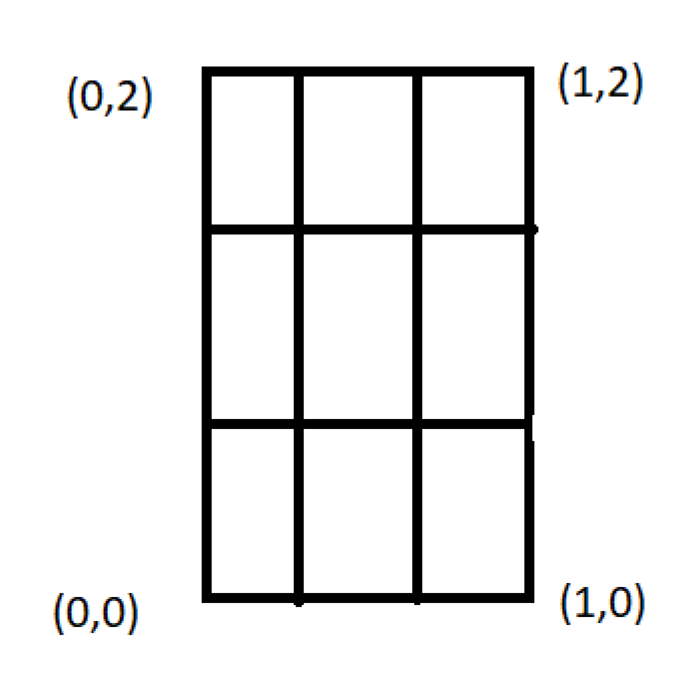
Física Computacional

28 de enero de 2021

Ecuación de Poisson en dos dimensiones

- $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 4$
- Condiciones de frontera:
- $\phi(x,0) = x^2,\ \phi(x,2) = (x-2)^2, \quad para\ 0 \leq x \leq 1$
- $\phi(0,y) = y^2,\ \phi(1,y) = (y-1)^2, \quad para\ 0 \leq y \leq 2$
- Resolver en una malla de 3 x 3

- Malla



- $\Delta x = \frac{1}{3}$
- $\Delta y = \frac{2}{3}$

$x_i = i\ \Delta x,$ i=0,1,2,3

$y_j = j\ \Delta y,$ j=0,1,2,3

$$\phi(i,j) \equiv \phi(x_i, y_j)$$

- Aproximamos a las derivadas con formulas de segundo orden. La ecuación diferencial se escribe así:

$$\frac{\phi(i+1,j) - 2\phi(i,j) + \phi(i-1,j)}{\Delta x^2} + \frac{\phi(i,j+1) - 2\phi(i,j) + \phi(i,j-l)}{\Delta y^2} = 4$$

Reescribimos:

$$\frac{1}{\Delta x^2}\,\phi(i-1,j) + \frac{1}{\Delta x^2}\,\phi(i+1,j) + \frac{1}{\Delta y^2}\,\phi(i,j-1) + \frac{1}{\Delta y^2}\,\phi(i,j+1) - \left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2}\right)\phi(i,j) = 4$$

Despejamos $\phi(i,j)$

$$\phi(i,j)=\frac{1}{\frac{2}{\Delta x^2}+\frac{2}{\Delta y^2}}\left(-4+\frac{1}{\Delta x^2}\ \phi(i-1,j)+\frac{1}{\Delta x^2}\ \phi(i+1,j)+\frac{1}{\Delta y^2}\ \phi(i,j-1)+\frac{1}{\Delta y^2}\ \phi(i,j+1)\right)$$

Las incógnitas son $\phi(1,1), \phi(1,2)$, $\phi(2,1)$, $\phi(2,2)$. (cuatro). Se requieren entonces 4 ecuaciones para hallar la solución.

Las condiciones de frontera son:

$$\phi(i,0)=x_i{}^2, \qquad \phi(i,3)=(x_i-2)^2 \qquad i=0,1,2,3$$

$$\phi(0,j)=y_j{}^2, \qquad \phi(3,j)=\left(y_j-1\right)^2 \qquad j=0,1,2,3$$

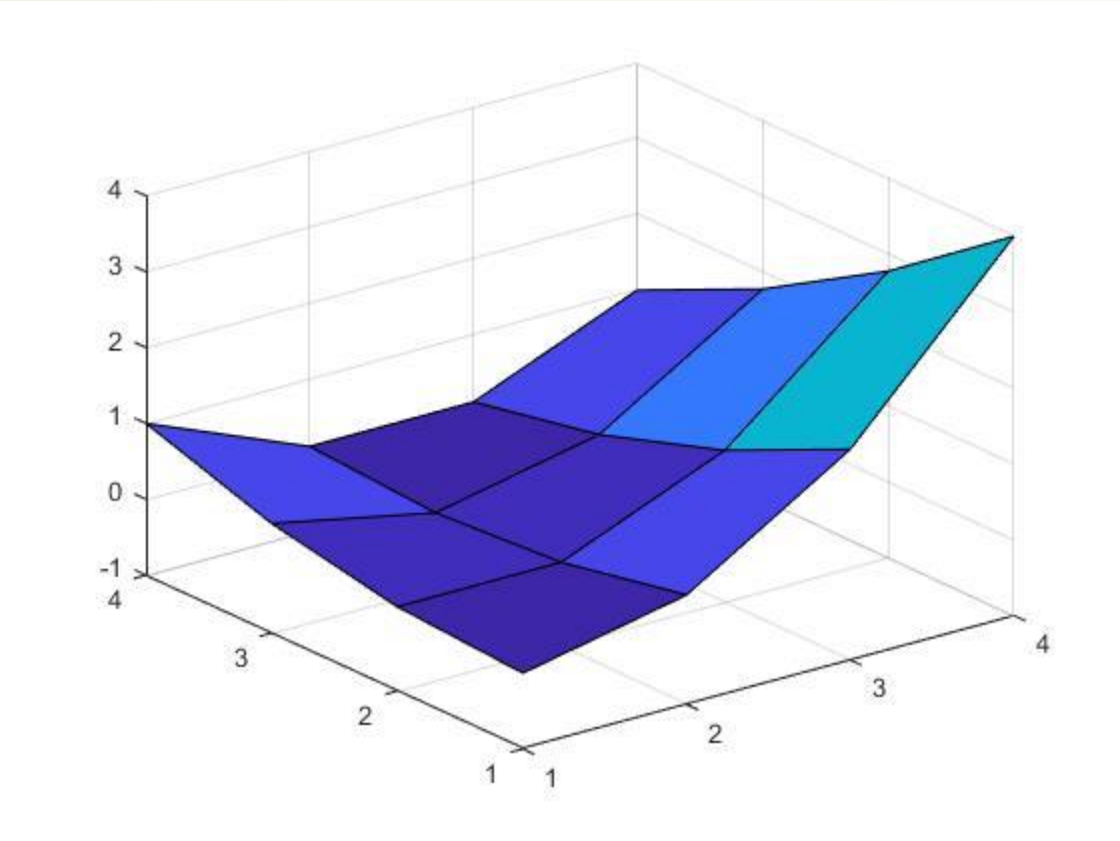
Las cuatro ecuaciones son:

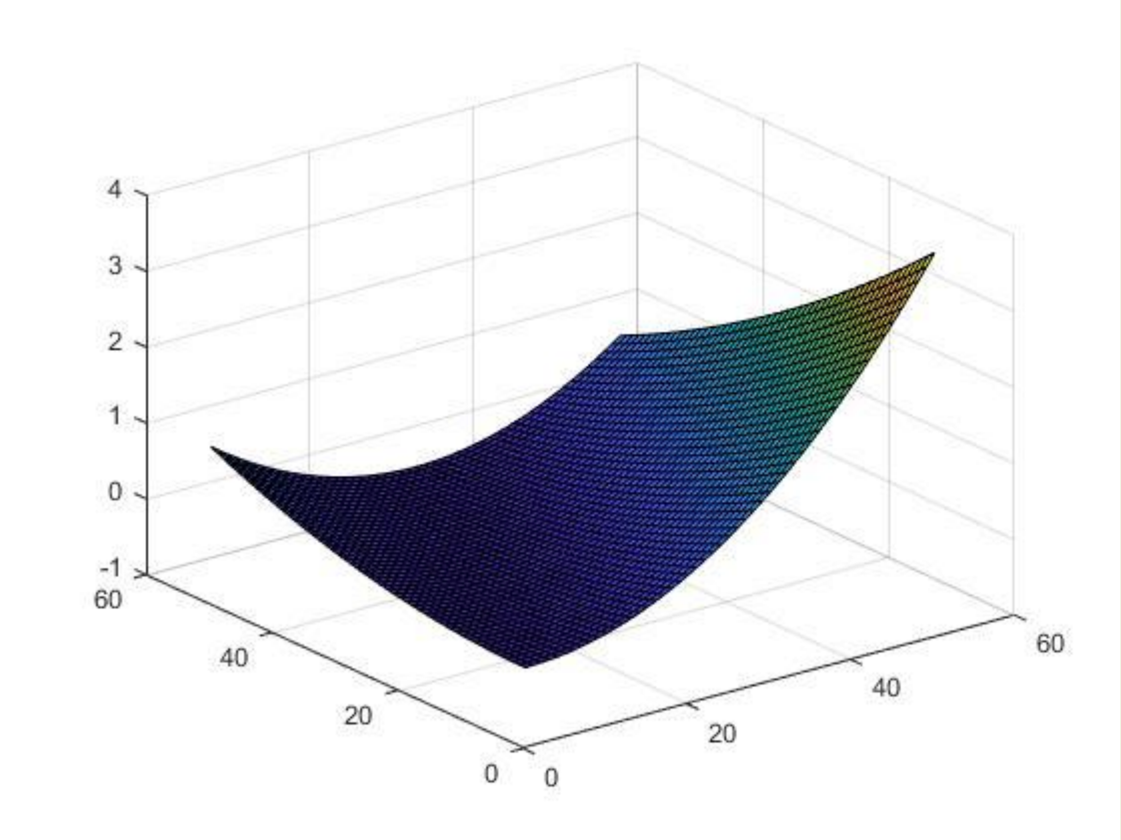
- $$\phi(1,1) = \frac{1}{\frac{2}{\Delta x^2}+\frac{2}{\Delta y^2}}\left(-4 + \frac{1}{\Delta x^2}\ \phi(0,1) + \frac{1}{\Delta x^2}\ \phi(2,1)+\frac{1}{\Delta y^2}\ \phi(1,0)+\frac{1}{\Delta y^2}\ \phi(1,2)\right)$$
- $$\phi(2,1) = \frac{1}{\frac{2}{\Delta x^2}+\frac{2}{\Delta y^2}}\left(-4 + \frac{1}{\Delta x^2}\ \phi(1,1) + \frac{1}{\Delta x^2}\ \phi(3,1)+\frac{1}{\Delta y^2}\ \phi(2,0)+\frac{1}{\Delta y^2}\ \phi(2,2)\right)$$
- $$\phi(1,2) = \frac{1}{\frac{2}{\Delta x^2}+\frac{2}{\Delta y^2}}\left(-4 + \frac{1}{\Delta x^2}\ \phi(0,2) + \frac{1}{\Delta x^2}\ \phi(2,2)+\frac{1}{\Delta y^2}\ \phi(1,1)+\frac{1}{\Delta y^2}\ \phi(1,3)\right)$$
- $$\phi(2,2) = \frac{1}{\frac{2}{\Delta x^2}+\frac{2}{\Delta y^2}}\left(-4 + \frac{1}{\Delta x^2}\ \phi(1,2) + \frac{1}{\Delta x^2}\ \phi(3,2)+\frac{1}{\Delta y^2}\ \phi(2,1)+\frac{1}{\Delta y^2}\ \phi(2,3)\right)$$

- Método de sobrerrelajación.
- Se introduce un parámetro w $(1 \leq w \leq 2)$
- Cada una de las ecuaciones de la lamina anterior se puede poner de la siguiente manera:
- $\phi(i,j) = F$
- Se usa la relación de recurrencia
- $\phi(i,j) = (1-w)\ \phi(i,j) + wF$
- Se aplica esta relación de recurrencia hasta que la diferencia entre el paso k y el paso k+1 sea menor que un valor ε

Solución

0.00000000	0.444444478	1.77777791	4.00000000
0.111111119	0.111111060	0.999999881	2.77777767
0.444444478	-4.50346249E-08	0.444444358	1.77777755
1.00000000	0.111111097	0.111111134	1.00000000


4
3
2
1
0
-1
4
3
2
1
1
2
3
4


4
3
2
1
0
-1
60
40
20
0
0
20
40
60

Ecuación de calor en sólidos

- $\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T$
- Se usa formula de diferencias regresivas para la derivada temporal
- $\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{3T_p(x,y) - 4T_{p-1}(x,y) + T_{p-2}(x,y)}{2\Delta t}$
- El índice p corresponde al tiempo actual, p-1 al tiempo t-Δt y p-2 al tiempo t-2Δt

- La ecuación resultante es:

$$\frac{3T_p(x,y)}{2\Delta t} - \nabla^2 T_p = \frac{4T_{p-1}(x,y) - T_{p-2}(x,y)}{2\Delta t}$$