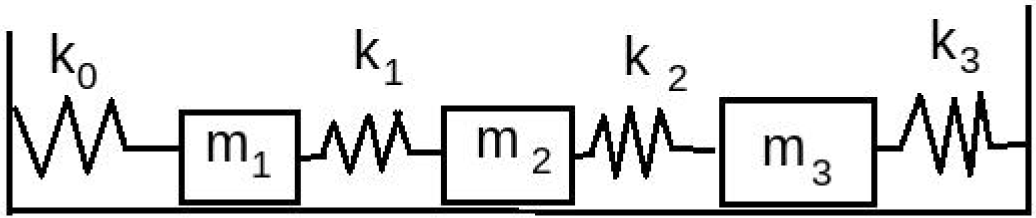
PROBLEMA DE VALORES PROPIOS

Sea el sistema mostrado en la Figura, con 3 masas, m_1, m_2 y m_3 , 4 resortes, k_0 , k_1 , k_2 y k_3



Suponiendo que no hay rozamiento, se plantea el problema de hallar los modos normales de vibración del sistema.

No es dificil hallar las ecuaciones de movimiento del sistema anterior, las cuales son

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_0 x_1 + k_1 (x_2 - x_1)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_1 (x_2 - x_1) + k_2 (x_3 - x_2)$$

$$m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} = -k_2 (x_3 - x_2) - k_3 x_3$$

Que forman un sistema de 3 ecuaciones diferenciales acopladas. Sin embargo dicho sistema se puede transformar en un problema de valores propios para una matriz

Para poder llevar adelante la transformación mencionada, supondremos soluciones para las x_i del tipo

$$x_i(t) = A_{0i}\, e^{j\omega t}$$

De la forma de las x_i, se tiene entonces que

$$\frac{d x_i}{dt} = A_{0i}\, j\omega e^{j\omega t}$$

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -A_{0i}\, \omega^2 e^{j\omega t}$$

Donde j = $\sqrt{-1}$

Sustituyendo la expresión para la segunda derivada en las expresiones anteriores obtenemos

$$-m_1 A_{01} e^{j\omega t} = -k_0 A_{01} e^{j\omega t} + k_1 \left(A_{02} e^{j\omega t} - A_{01} e^{j\omega t} \right)$$

$$-m_2 A_{02} \omega^2 e^{j\omega t} = -k_1 \left(A_{02} e^{j\omega t} - A_{01} e^{j\omega t} \right) + k_2 \left(A_{03} e^{j\omega t} - A_{02} e^{j\omega t} \right)$$

$$m_3 A_{03} e^{j\omega t} = -k_2 \left(A_{03} e^{j\omega t} - A_{02} e^{j\omega t} \right) - k_3 A_{03} e^{j\omega t}$$

Dividiendo cada ecuación entre $e^{j\omega t}$ se obtendrá

$$-m_1\,\omega^2 A_{01} = -k_0 A_{01} + k_1 (A_{02} - A_{01})$$

$$-m_2\,\omega^2 A_{02} = -k_1 (A_{02} - A_{01}) + k_2 (A_{03} - A_{02})$$

$$-m_3\,\omega^2 A_{03} = -k_2 (A_{03} - A_{02}) - k_3 A_{03}$$

Que es equivalente a

$$\frac{k_0}{m_1} A_{01} - \frac{k_1}{m_1}\left(A_{02} - A_{01}\right) = \omega^2 A_{01}$$

$$\frac{k_1}{m_2}\left(A_{02} - A_{01}\right) - \frac{k_2}{m_2}\left(A_{03} - A_{02}\right) = \omega^2 A_{02}$$

$$\frac{k_2}{m_3}\left(A_{03} - A_{02}\right) + \frac{k_3}{m_3} A_{03} = \omega^2 A_{03}$$

Reordenando, obtenemos

$$\left(\frac{k_0}{m_1}+\frac{k_1}{m_1}\right)A_{01}-\frac{k_1}{m_1}A_{02}=\omega^2 A_{01}$$

$$-\frac{k_1}{m_2}A_{01}+\left(\frac{k_1}{m_2}+\frac{k_2}{m_2}\right)A_{02}-\frac{k_2}{m_2}A_{03}=\omega^2 A_{02}$$

$$-\frac{k_2}{m_3}A_{02}+\left(\frac{k_2}{m_3}+\frac{k_3}{m_3}\right)A_{03}=\omega^2 A_{03}$$

Sistema de ecuaciones que se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{k_0}{m_1}+\frac{k_1}{m_1}\right) & -\frac{k_1}{m_1} & 0 \\ -\frac{k_1}{m_2} & \left(\frac{k_1}{m_2}+\frac{k_2}{m_2}\right) & -\frac{k_2}{m_2} \\ 0 & -\frac{k_2}{m_3} & \left(\frac{k_2}{m_3}+\frac{k_3}{m_3}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{01} \\ A_{02} \\ A_{03} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} A_{01} \\ A_{02} \\ A_{03} \end{pmatrix}$$

Donde $\alpha = \omega^2$

Aquí ya tenemos un problema de valores propios

Resolvamos entonces el problema numérico, donde

$$k_0 = 1\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}, \quad k_1 = 2\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \quad k_2 = 3\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \quad k_3 = 4\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \quad \text{y}$$

$$m_1 = 1\,\mathrm{kg}, \quad m_2 = 2\,\mathrm{kg} \quad m_3 = 3\,\mathrm{kg}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$