INTEGRACIÓN

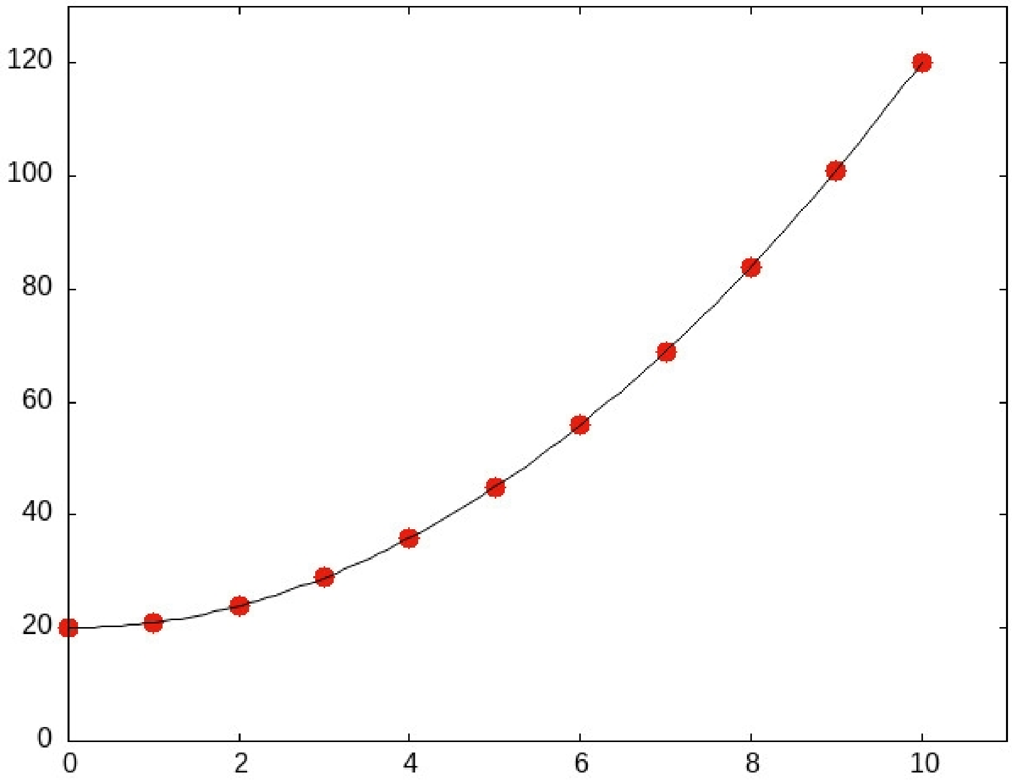
Como ha sido hasta estos momentos seguiremos enfocando todos nuestro temas desde el punto de vista numérico.
De nuevo, consideremos un conjunto de N+1 puntos { (x_i , y_i), i=0,N}. El primer método de integración que estudiaremos, será el más básico, la integración según Riemann. La integral se puede ver como el área bajo la curva, en el caso de una función real de variable real.
Si a= x_0 , b=x_N , entonces la integral definida de a hasta b, denotada por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_j \to 0} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \Delta x_j = \lim_{N \to \infty} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \Delta x_j \qquad (I-1)$$

Donde se presupone que f(x_j) = y_j , y cada producto de la suma, corresponde al área de un rectángulo.

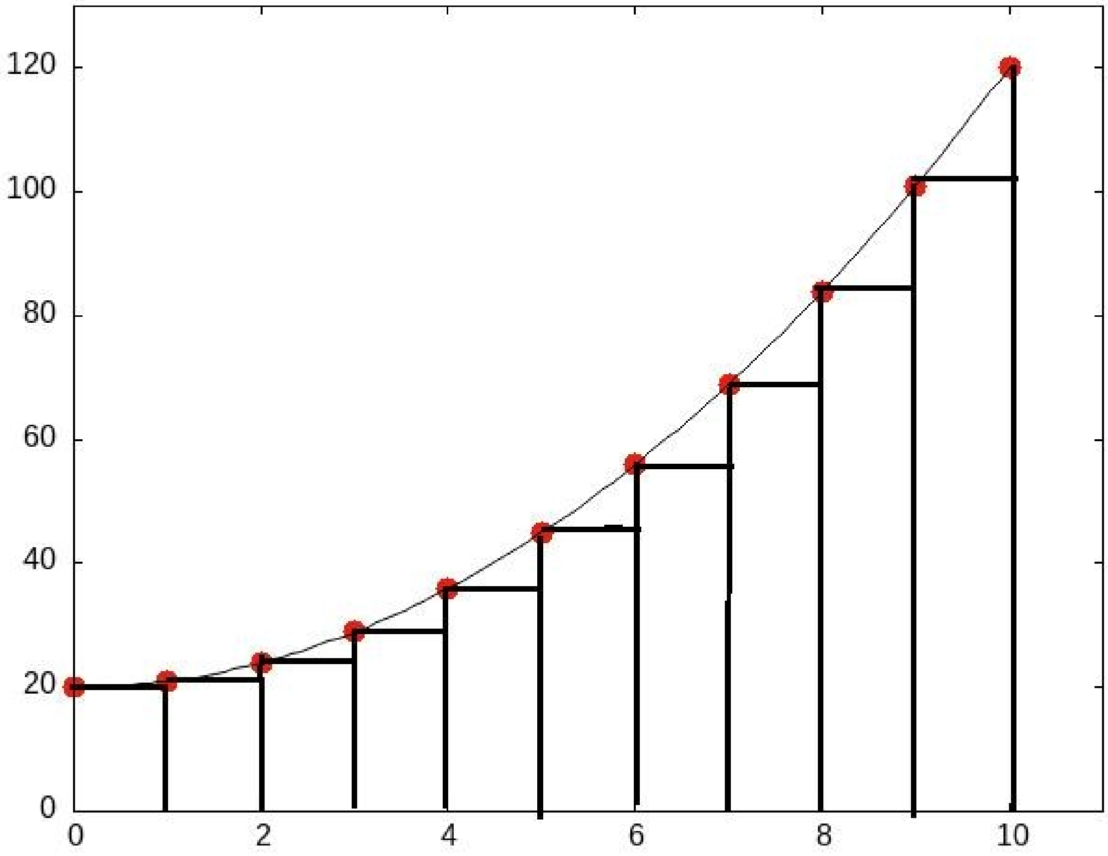
Hay muchas formas de llevar adelante la suma indicada. Por ejemplo, en cada subintervalo entre x_i y x_{i+1} , podemos elegir la x_j más a la izquierda de ese sub-intervalo. Si la función es creciente, los rectángulos correspondientes serán

FIGURA 1



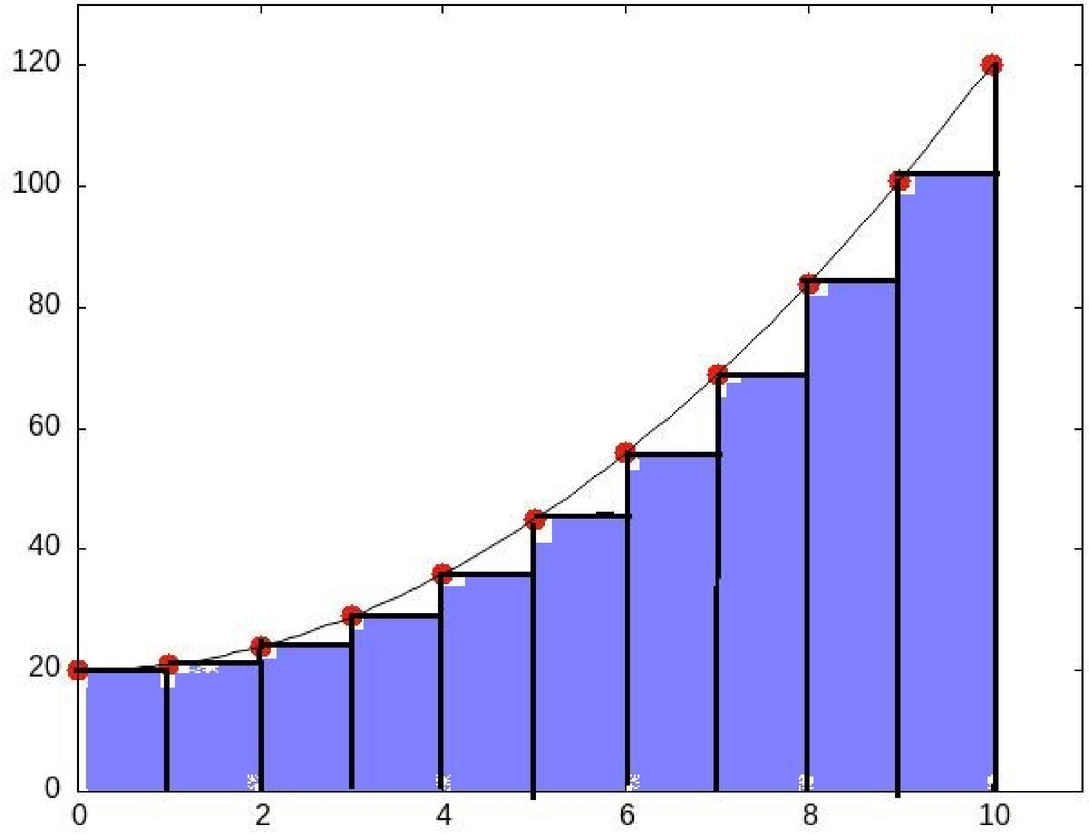
los mostrados en la siguiente figura

FIGURA 2



Tendremos las llamadas sumas inferiores

FIGURA 3



Podemos tomar las x a la derecha del subintervalo citado, quedando entonces las llamadas sumas superiores. Pero para generar los rectángulos, se puede usar cualquier x en ese subintervalo, como se muestra en la Figura de la siguiente página

FIGURA 4

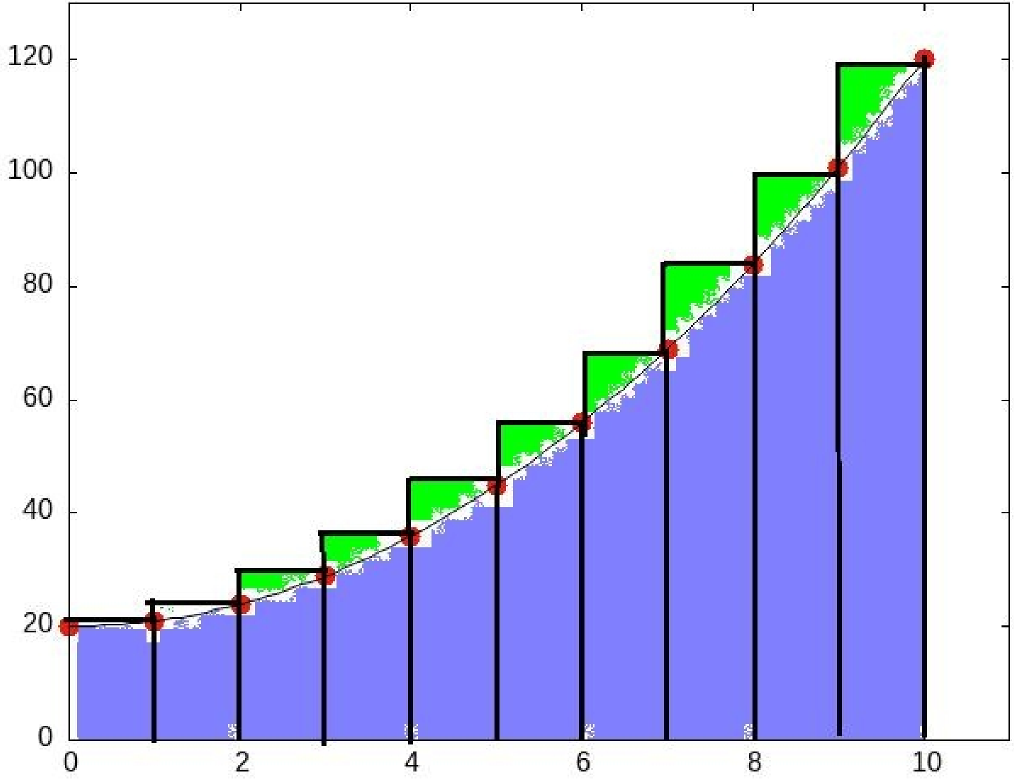
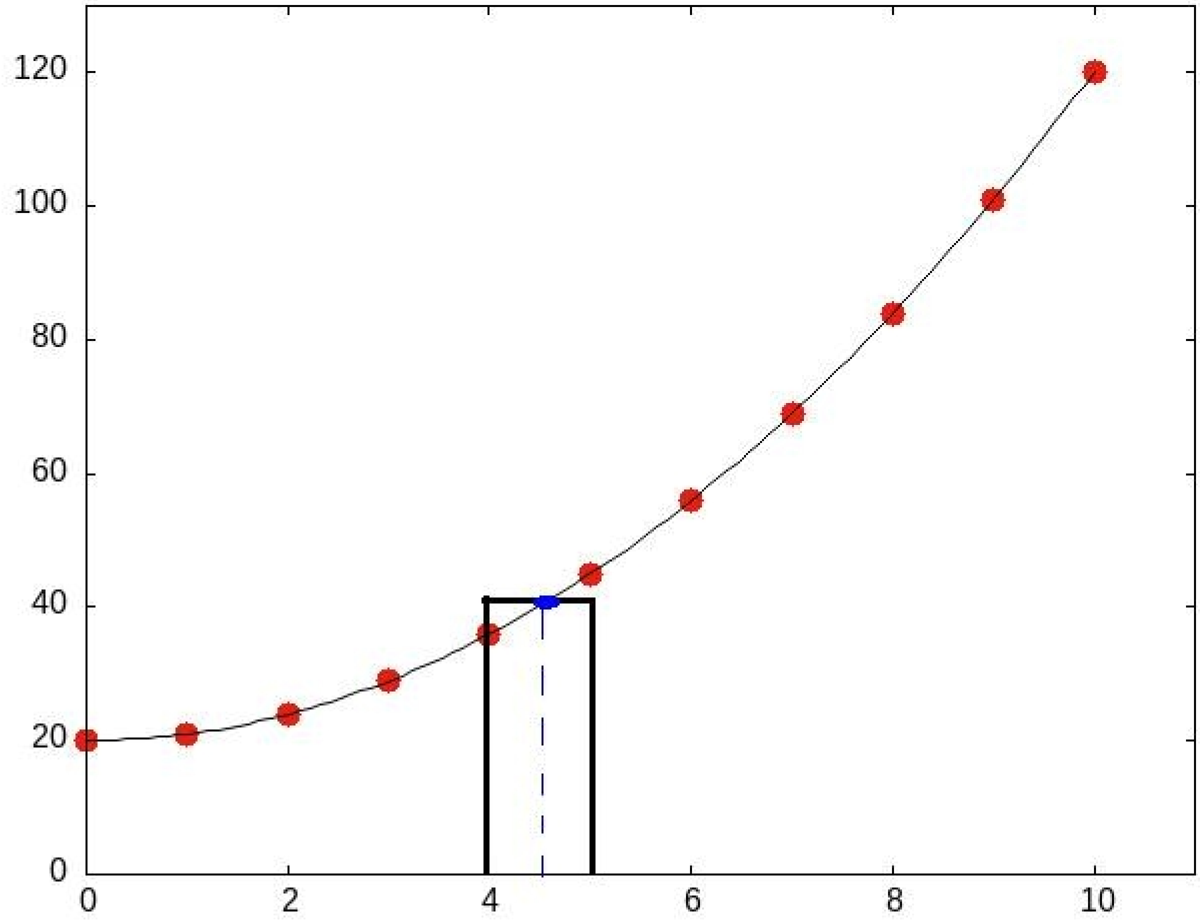
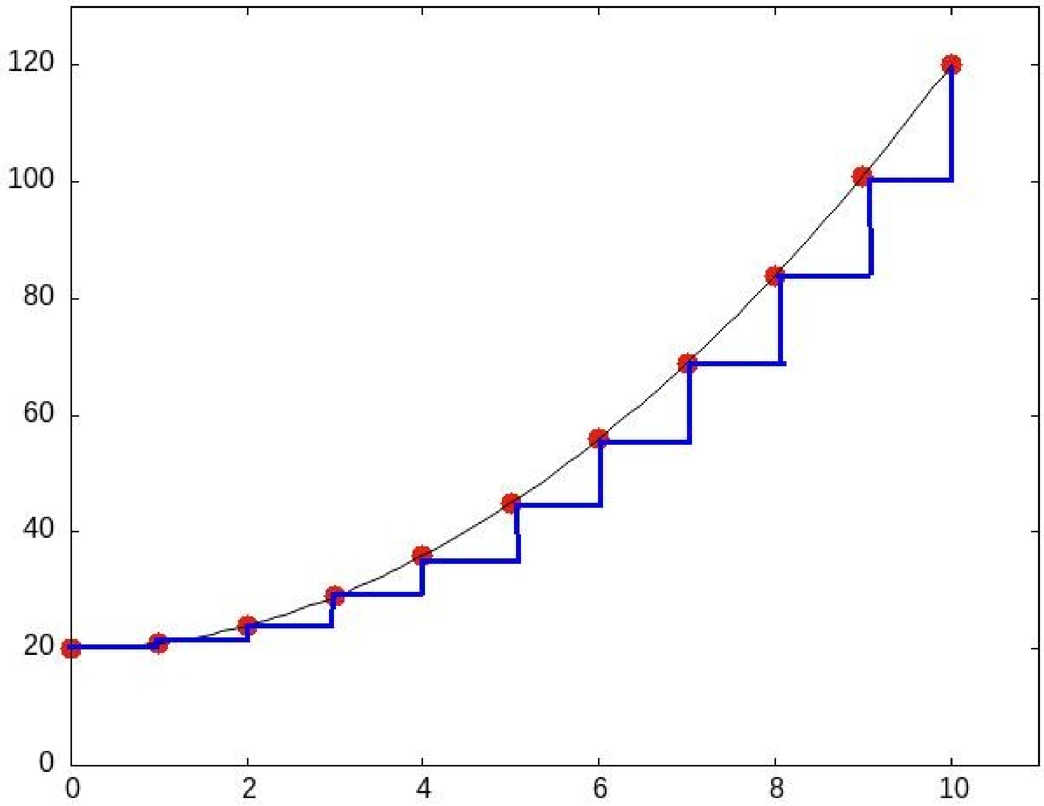


FIGURA 5



Una forma de ver las cosas, es como si la funcion f(x) fuera aproximada por una conjunto de segmentos de recta, unos horizontales y otros verticales

FIGURA 6



Si elegimos las x_j como se muestra en la Figuras 2-3, tenemos entonces que la Ecuación (I-1) queda como

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} y_i (x_{i+1} - x_i) \qquad (I-2)$$

Además, si $x_{i+1} – x_i = h$, entonces tendremos

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} y_i h \qquad (I-3)$$

REGLA DEL TRAPECIO

La siguiente aproximación consiste en aproximar la función por segmentos de recta que unen los puntos. Visto esto para un par de puntos, se verá como se muestra en la Figura 7

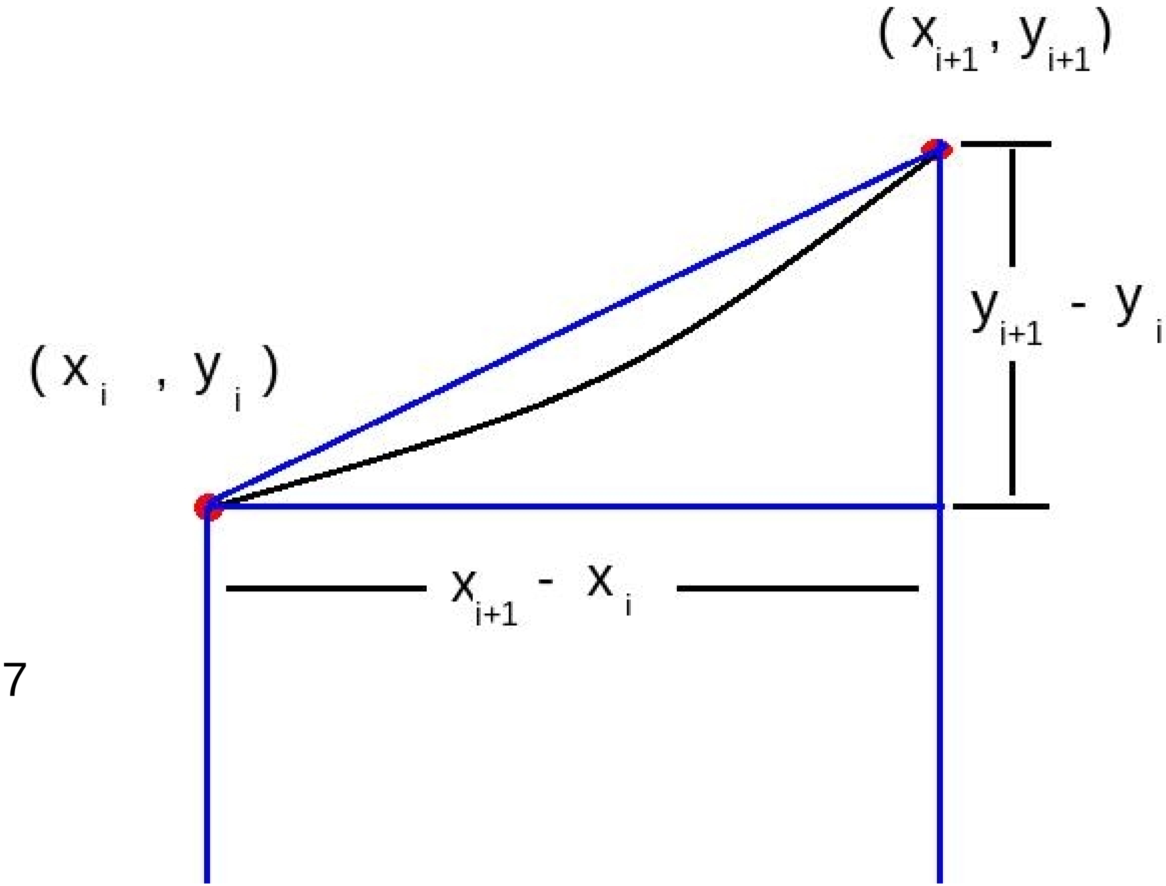


FIGURA 7

Pero esto no es más que el promedio se las sumas superiores e inferiores de Riemann, ya que las sumas inferiores de Riemann para los datos del archivo datos-integración.dat es

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} y_i h = 485$$

En tanto que las sumas superiores de Riemann para este mismo conjunto de datos es

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} y_{i+1} h = 585$$

Es evidente que

$$\frac{485+585}{2}=\frac{1070}{2}=535$$

Volviendo a la Figura 7 , los términos en la suma serán ahora

$$y_i(x_{i+1}-x_i)+\frac{1}{2}(x_{i+1}-x_i)(y_{i+1}-y_i)=\frac{1}{2}(x_{i+1}-x_i)(y_{i+1}+y_i) \qquad (I-4)$$

Y la expresión para la integral será

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2}(x_{i+1}-x_i)(y_{i+1}+y_i) \qquad (I-5)$$

En tanto que si $x_{i+1} - x_i = h$, tendremos

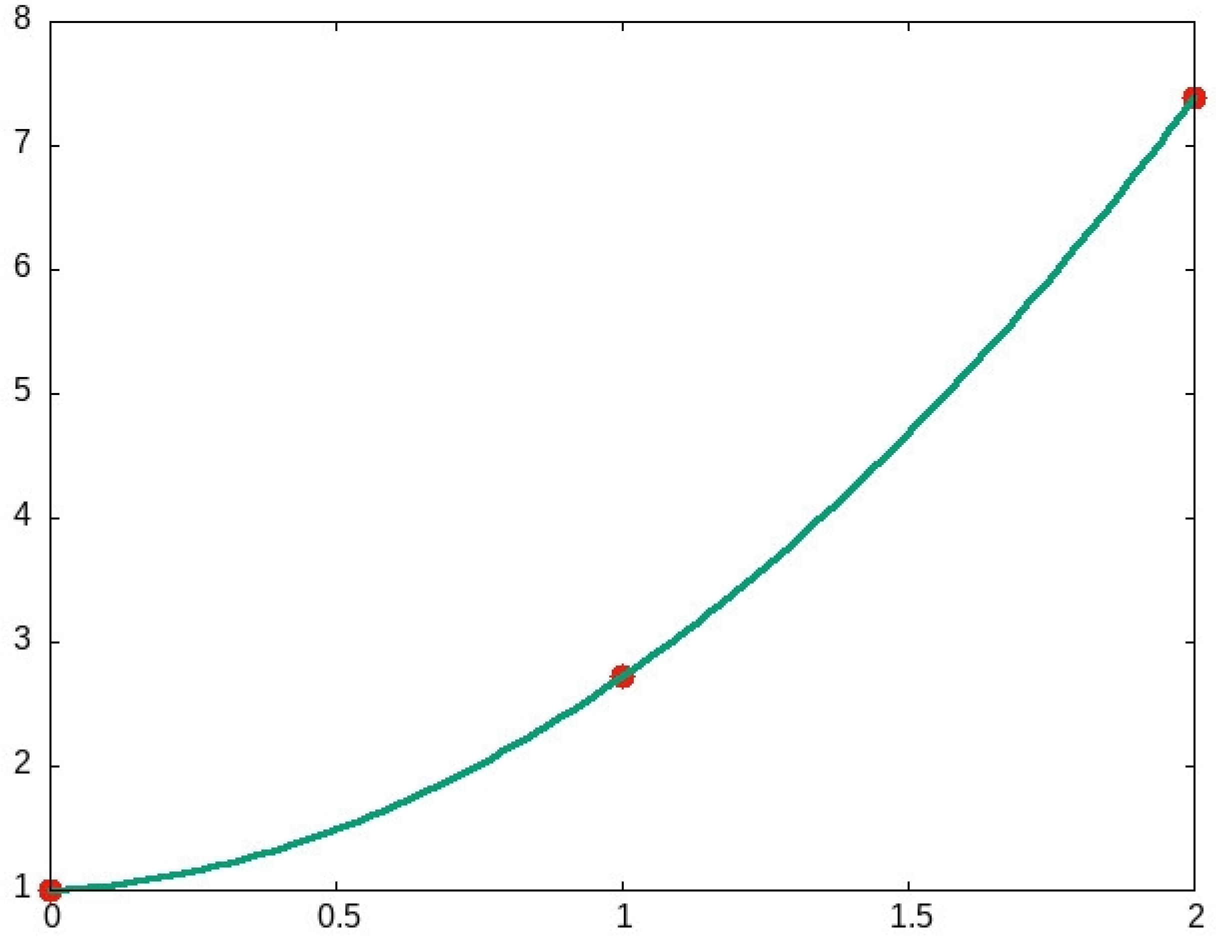
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2} h\left(y_{i+1} + y_i\right) \qquad (I-6)$$

Evaluando esta expresión para los datos del archivo “datos-integracion.dat”, tenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2} h\left(y_{i+1} + y_i\right) = 535$$

REGLA DE 1/3 DE SIMPSON

En la aproximación de sumas de Riemann, la función fué aproximada por segmentos de recta horizontales y verticales, con una función escalonada. En la regla del trapecio se siguieron usando segmentos de recta, pero ahora estos unían cada par de puntos de nuestro conjunto de N+1 puntos. La siguiente aproximación, conocida como la regla de 1/3 de Simpson, utiliza parábolas, y lo que haces es ajustar una parábola cada 3 puntos


8
7
6
5
4
3
2
1
0
0.5
1
1.5
2

En la figura anterior, se tienen 3 puntos, (0 ,1), (1, 2.718281) y (2, 7.389056). Para ajustar una parabola $g(x)= a + bx + cx^2$, tenemos que plantear el siguiente sistema de ecuaciones

$$1 = a + b \times 0 + c \times 0^2$$
$$2.718281 = a + b \times 1 + c \times 1^2$$
$$7.389056 = a + b \times 2 + c \times 2^2$$

Resolviendo el sistema anterior, se tiene que

$$a = 1$$
$$b = 0.242033958$$
$$c = 1.47624707$$

O sea que la parábola que pasa por esos tres puntos es

$$g(x)=1+0.242033958\,x+1.47624707\,x^2$$

Vamos a sustituir la función por este polinomio, y entonces la integral entre 0 y 2 para esta función será

$$\int_0^2 f(x)\,dx \approx \int_0^2 g(x)\,dx = \int_0^2 \left(1+0.242033958\,x+1.47624707\,x^2\right)dx$$

$$x\,\Big|_0^2 + 0.242033958\,\frac{x^2}{2}\,\Big|_0^2 + 1.47624707\,\frac{x^3}{3}\,\Big|_0^2$$

Consideremos el problema de tener tres puntos (x_0, y_0) , (x_1, y_1) y (x_2, y_2) conocidos y hallar un polinomio de grados 2 que pase por ellos. Entonces se deben satisfacer las siguientes ecuaciones lineales:

$$y_0 = a + bx_0 + cx_0^2 \qquad (I-6A)$$

$$y_1 = a + bx_1 + cx_1^2 \qquad (I-6B)$$

$$y_2 = a + bx_2 + cx_2^2 \qquad (I-6C)$$

Si a la Ecuación (I-6B) le restamos la Ecuación (I-6A), tenemos

$$y_1 - y_0 = b(x_1 - x_0) + c(x_1^2 - x_0^2) \qquad (I-7A)$$

Y restando a la Ecuación (I-6C) la Ecuación (I-6B),

$$y_2 - y_1 = b(x_2 - x_1) + c(x - 2^2 - x_1^2) \qquad (I-7B)$$

Las Ecuaciones (I-7A) e (I-7B) forman un sistema lineal de 2 ecuaciones con dos Incognitas, b y c. De la Ecuación (I-7A) despejamos b, obteniendo

$$b=\frac{\left(y_1-y_0\right)-c\left(x_1^2-x_0^2\right)}{x_1-x_0} \qquad \left(I-8\,A\right)$$

En tanto que si despejamos b de la Ecuación (I-7B), se tiene

$$b=\frac{\left(y_2-y_1\right)-c\left(x_2^2-x_1^2\right)}{x_2-x_1} \qquad \left(I-8\,B\right)$$

Igualando (I-8A) e (I-8B), se obtiene

$$\frac{(y_1-y_0)-c(x_1^2-x_0^2)}{x_1-x_0}=\frac{(y_2-y_1)-c(x_2^2-x_1^2)}{x_2-x_1} \qquad (I-9)$$

Despejando c de la Ecuacion (I-9)

$$c=\frac{(y_1-y_0)(x_2-x_1)-(y_2-y_1)(x_1-x_0)}{(x_1^2-x_0^2)(x_2-x_1)-(x_2^2-x_1^2)(x_1-x_0)} \qquad (I-10)$$

b se obtiene de (I-8A)

$$b=\frac{(y_1-y_0)-c(x_1^2-x_0^2)}{x_1-x_0} \qquad (I-8\,A)$$

Y a se despeja de (I-6A)

$$a = y_0 - bx_0 - cx_0^2 \qquad (I-6AA)$$

$$c = \frac{(y_1 - y_0)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x_1 - x_0)}{(x_1^2 - x_0^2)(x_2 - x_1) - (x_2^2 - x_1^2)(x_1 - x_0)}$$

$$c = \frac{(y_1 - y_0)h - (y_2 - y_1)h}{(x_1^2 - x_0^2)h - (x_2^2 - x_1^2)h}$$

$$c = \frac{(y_1 - y_0) - (y_2 - y_1)}{(x_1^2 - x_0^2) - (x_2^2 - x_1^2)}$$

pero

$$x_1^2 - x_0^2 = (x_1 + x_0)(x_1 - x_0) = h(x_1 + x_0)$$
$$x_2^2 - x_1^2 = (x_2 + x_1)(x_2 - x_1) = h(x_2 + x_1)$$

$$c=\frac{-y_0+2y_1-y_2}{h(x_1+x_0)-h(x_2+x_1)}=\frac{-y_0+2y_1-y_2}{h(x_1+x_0-x_2-x_1)}=\frac{-y_0+2y_1-y_2}{h(x_0-x_2)}=$$

$$=\frac{-y_0+2y_1-y_2}{h(-2h)}=\frac{y_0-2y_1+y_2}{2h^2}$$