INTERPOLACIÓN DE NEWTON.

DIFERENCIAS DIVIDIDAS.

Consideremos de nuevo un conjunto de N+1 puntos { (x_i,y_i), i=0,..N}, en donde buscamos de nuevo una función interpolante g(x) que cumpla con que $g(x_i) = y_i$ con la intención de obtener valores de la función en puntos x_a diferentes de x_i.

Sea g(x) un polinomio del tipo

$$g(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)..$$

$$.....a_N(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{N-1}) \qquad (IB-1)$$

Vamos a comenzar a determinar las constantes a_i de ese polinomio. Si evalúo el polinomio en g(x) en x_0, entonces se tendrá

$$g(x_0)=a_0=y_0 \qquad (IB-2)$$

por condición de interpolación. Si evalúo ahora el polinomio en x_1, se tendrá

$$g(x_1) = a_0 + a_1(x - x_0),$$

$$y_1 = y_0 + a_1(x_1 - x_0), \quad \text{de} \quad \text{donde}$$

$$, a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \qquad (IB-3)$$

Para determinar a_2 tenemos

$$g(x_2) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

Lo que nos lleva a la ecuación

$$y_2 = y_0 + \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \qquad (IB-4)$$

Despejando a_2 tenemos

$$a_2=\frac{(y_2-y_0)-\left(\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\right)(x_2-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{\frac{(y_2-y_0)}{(x_2-x_1)}-\left(\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\right)\frac{(x_2-x_0)}{(x_2-x_1)}}{(x_2-x_0)} \qquad (IB-5)$$

Trabajemos con en numerador de la expresión anterior

$$\frac{(y_2-y_0)}{(x_2-x_1)}-\frac{(y_1-y_0)}{(x_1-x_0)}\frac{(x_2-x_0)}{(x_2-x_1)}=\frac{(y_2-y_0)}{(x_2-x_1)}\frac{(x_1-x_0)}{(x_1-x_0)}-\frac{(y_1-y_0)}{(x_1-x_0)}\frac{(x_2-x_0)}{(x_2-x_1)}$$

$$\frac{(y_2-y_0)(x_1-x_0)-(y_1-y_0)(x_2-x_0)}{(x_2-x_1)(x_1-x_0)} \qquad (IB-6)$$

Trabajemos de nuevo con el numerador de esta ultima expresión

$$(y_2 - y_0)(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0) = y_2 x_1 - y_2 x_0 - y_0 x_1 + y_0 x_0 - y_1 x_2 + y_1 x_0$$

$$y_0 x_2 - y_0 x_0$$

El término $x_0 y_0$ se anula y le vamos a sumar $x_1 y_1 - x_1 y_1$ o sea 0, quedando entonces la anterior expresion como

$$(y_2 - y_0)(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0) = y_2 x_1 - y_2 x_0 - y_0 x_1 - y_1 x_2 + y_1 x_0$$

$$y_0 x_2 + x_1 y_1 - x_1 y_1$$

Agrupando adecuadamente los terminos de la derecha, tenemos

$$(y_2 - y_0)(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0) = (y_2 - y_1)(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_1)$$

Sustituyendo esta expresión de la Ecuacion (IB-6), obtenemos

$$(y_2 - y_0)(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0) = y_2 x_1 - y_2 x_0 - y_0 x_1 + y_0 x_0 - y_1 x_2 + y_1 x_0$$

$$y_0 x_2 - y_0 x_0$$

El término $x_0 y_0$ se anula y le vamos a sumar $x_1 y_1$ - $x_1 y_1$ o sea 0, quedando entonces La anterior expresion como

$$(y_2 - y_0)(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0) = y_2 x_1 - y_2 x_0 - y_0 x_1 - y_1 x_2 + y_1 x_0$$

$$y_0 x_2 + x_1 y_1 - x_1 y_1$$

Agrupando adecuadamente los terminos de la derecha, tenemos

$$(y_2 - y_0)(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0) = (y_2 - y_1)(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_1)$$

Sustituyendo esta expresión de la Ecuacion (IB-6), obtenemos

$$\frac{(y_2-y_0)(x_1-x_0)-(y_1-y_0)(x_2-x_0)}{(x_2-x_1)(x_1-x_0)}=\frac{(y_2-y_1)(x_1-x_0)-(y_1-y_0)(x_2-x_1)}{(x_2-x_1)(x_1-x_0)}$$

$$=\frac{y_2-y_1}{x_2-x1}-\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} \qquad (IB-7)$$

Por lo cual la expresion (IB-5) para a_2 queda como

$$a_2=\frac{\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x1}\right)-\left(\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\right)}{x_2-x_0} \qquad (IB-8)$$

Para hacer la notación más compacta, introduzcamos la notación de diferencias divididas. Recordemos que tenemos un conjunto de N+1 puntos {(x_i, y_i) , entonces la diferencia dividida de orden 0 en x_i es

$$y[x_i]=y_i \qquad (IB-9)$$

La diferencia dividida de orden uno de y respecto a x_i en terminos de las diferencias divididas de orden cero es

$$y[x_i, x_{i+1}] = \frac{y[x_{i+1}] - y[x_i]}{x_{i+1} - x_i} \qquad (IB-10)$$

La segunda diferencia dividida o diferencia dividida de orden dos es ahora

$$y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{y[x_{i+1}, x_{i+2}] - y[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i} \qquad (IB-11)$$

De forma inductiva, podemos generar la diferencia dividida de orden k, por la relación

$$y[x_i, x_{i+1} .... x_{i+k}] = \frac{y[x_{i+1}, x_{i+2} ... x_{i+k}] - y[x_i, x_{i+1} ... x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \qquad (IB-12)$$

Con esta notación, podemos escribir entonces

$$a_0 = y[x_0]$$

$$a_1 = y[x_{0,} x_1] \qquad (IB-13)$$

$$a_2 = y[x_{0,} x_{1,} x_2]$$

Y como era de esperarse, las subsecuentes a_k se escribiran como

$$a_k = y[x_{0,} x_{1,} ...... x_k] \qquad (IB-14)$$

Por lo cual, el polinomio de interpolación sera ahora

$$g(x) = y[x_0] + \sum_{k=1}^{N} y[x_{0,} x_{1,.} .... x_k](x - x_0)(x - x_1) .... (x - x_{k-1})$$

$$(IB-15)$$