Método de la Potencia

Consideremos una matriz **A**, la cual tiene vectores propios $\mathbf{v}_i$ con valores propios λ_i , tales que

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq |\lambda_4| .... \geq |\lambda_N| \qquad (1)¿$$

En esta parte del curso desarrollaremos un método para obtener el valor absoluto del valor propio dominante λ_1 . Para lograr tal fin, consideremos un vector $\mathbf{u}_0$ arbitrario. Dado que el conjunto $\{\mathbf{v_i}, \mathrm{i}=1, \ldots, \mathrm{N}\}$ forman una base, entonces podemos escribir al vector $\mathbf{u}_0$ como una combinación lineal de ellos

$$\mathbf{u}_0=\sum_{i=1}^{N} s_i \mathbf{v_i} \qquad (2)¿$$

Entonces cuando operamos la matriz **A** sobre el vector $\mathbf{u}_0$, tenemos

$$\mathbf{A}\,\mathbf{u_0}=\sum_{i=1}^{N} s_i \mathbf{A}\,\mathbf{v}_i=\sum_{i=1}^{N} s_i \lambda_i \mathbf{v}_i \qquad (3)$$

Si aplicamos de nuevo la matriz **A** sobre la ecuación (3), tenemos ahora

$$\mathbf{A}^{\mathbf{2}}\mathbf{u_0}=\sum_{i=1}^{N} s_i \mathbf{A}^{\mathbf{2}}\mathbf{v}_i=\sum_{i=1}^{N} s_i \lambda_i{}^2 \mathbf{v}_i \qquad (4)$$

Aplicando ahora k veces la matriz **A**, obtenemos

$$\mathbf{A}^k \mathbf{u_0} = \sum_{i=1}^{N} s_i \mathbf{A}^k \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{N} s_i \lambda_i^{\,k} \mathbf{v}_i = \lambda_1^{\,k} \left(s_1 \mathbf{v_1} + s_2 \left(\frac{\lambda_2^{\,k}}{\lambda_1^{\,k}} \right) \mathbf{v_2} + s_3 \left(\frac{\lambda_3^{\,k}}{\lambda_1^{\,k}} \right) \mathbf{v_3} + \ldots\ldots + s_N \left(\frac{\lambda_N^{\,k}}{\lambda_1^{\,k}} \right) \mathbf{v_N} \right) \quad (5)$$

Si hacemos crecer mucho a k, entonces sólo sobrevivirá el primer término, en virtud de la relación (1) .Para poder lograr una convergencia adecuada y obtener de forma sencilla el valor propio dominante, tendremos que definir la relación de recurrencia dada por

$$\mathbf{u}_{k+1} = \frac{\mathbf{A}\,\mathbf{u}_k}{|\mathbf{A}\,\mathbf{u}_k|}$$

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{A}\,\mathbf{u}_0}{|\mathbf{A}\,\mathbf{u}_0|}$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{A}\,\mathbf{u}_1}{|\mathbf{A}\,\mathbf{u}_1|}$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{A}\,\mathbf{u}_2}{|\mathbf{A}\,\mathbf{u}_2|}$$

$$\mathbf{u}_4 = \frac{\mathbf{A}\,\mathbf{u}_3}{|\mathbf{A}\,\mathbf{u}_3|}$$

$$|\lambda_1^{(\mathrm{k})}| = |\mathbf{A}\,\mathbf{u}_{\mathrm{k}}|$$

$$\mathbf{A}^k \mathbf{u_0} = \sum_{i=1}^{N} s_i \mathbf{A}^k \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{N} s_i \lambda_i^k \mathbf{v}_i = \lambda_1^k \left(s_1 \mathbf{v_1} + s_2 \left(\frac{\lambda_2^k}{\lambda_1^k} \right) \mathbf{v_2} + s_3 \left(\frac{\lambda_3^k}{\lambda_1^k} \right) \mathbf{v_3} + \ldots\ldots + s_N \left(\frac{\lambda_N^k}{\lambda_1^k} \right) \mathbf{v_N} \right) \quad (5)$$