SOLUCION DE SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

FISICA COMPUTACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

26 de noviembre de 2020

Planteamiento del problema

- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_n$$

……………..

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

- O en forma matricial: Ax=b, en donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \quad y \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

SISTEMA DE ECUACION TRIANGULAR SUPERIOR Y PROCEDIMIENTO DE SUSTITUCION HACIA ATRAS

- Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

En la matriz A todos los elementos debajo de la diagonal valen cero

PROCEDIMIENTO DE SOLUCION

- De la última ecuación se obtiene x_n :

$$a_{nn}x_n = b_n \quad \Longrightarrow \quad x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

- Luego se calcula x_{n-1} usando la penúltima ecuación:

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \;\Longrightarrow\; x_{n-1} = \left(\frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}\right)$$

- Enseguida se obtiene x_{n-2} usando la antepenúltima ecuación:

$$a_{n-2,n-2}x_{n-2} + \; a_{n-2,n-1}x_{n-1} + a_{n-2,n}x_n = b_{n-2}$$

$$\Longrightarrow \quad x_{n-2} = \left(\frac{b_{n-2} - a_{n-2,n}x_n - a_{n-2,n-1}x_{n-1}}{a_{n-2,n-2}}\right)$$

- En general, para obtener x_k se usa la k-esima ecuación:

$$a_{k,k}x_k + \ a_{k,k+1}x_{k+1} + \cdots + a_{k,n}x_n = b_k$$

Se despeja x_k :

$$x_k = \left(\frac{b_k - a_{k,n}x_n - a_{k,n-1}x_{n-1} - \cdots - a_{k,k+1}x_{k+1}}{a_{k,k}}\right)$$

$$x_k = \left(\frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{j=n} a_{k,j}x_j}{a_{k,k}}\right), \qquad \text{k=n,n-1,n-2, …,1}$$

EJERCICIO

- Resolver el sistema de ecuaciones triangular superior:

$$
\begin{aligned}
5x_1 - 3x_2 - 7x_3 + x_4 &= -14 \\
11x_2 + 9x_3 + 5x_4 &= 22 \\
3x_3 - 13x_4 &= -11 \\
7x_4 &= 14
\end{aligned}
$$

SOLUCION PARA UN SISTEMA DE ECUACIONES ARBITRARIO

- Primer paso: conversión de matriz a triangular superior
- Calcula de la solución usando método de sustitución hacia atrás.

- Operaciones permitidas en un sistema de ecuaciones

a) Intercambiar dos ecuaciones (o dos filas en una matriz)
b) Multiplicar a una ecuación por una constante
c) Sustituir una ecuación por una combinación lineal de esta y otra ecuación

1) Resolver sistema de ecuaciones

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 13$$
$$2x_1 + 0x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 28$$
$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 20$$
$$-3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6$$

- La conversión a matriz triangular superior da lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & -4 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -7.5 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -18 \end{pmatrix}$$

Esta es la matriz extendida. La solución luego de aplicar el método de sustitución hacia atrás es:

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 4 \quad x_4 = 2$$

2) Resolver ahora un sistema de ecuaciones de 5 x 5

$$2x_1 + x_2 \text{-} x_3 + x_4 - 3x_5 = 7$$

$$x_1 + 0x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 2$$

$$0x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = -5$$

$$3x_1 + x_2 - 4x_3 + 0x_4 + 5x_5 = 6$$

$$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 3$$

Después de convertir el sistema de ecuaciones a triangular superior y usar el método de sustitución hacia atrás se obtiene la solución

$x_1 = 1.91812$ $x_2 = 1.96491$ $x_3 = -0.98830$ $x_4 = -3.19298$ $x_5 = -1.13450$

3) Resolver la ecuación diferencial

- Considerese la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4(x - t)$$

con las condiciones de frontera:

$$x(0) = 0 \qquad x(1) = 2$$

Esta ecuación se va a resolver numéricamente en el intervalo [0,1] para los puntos $t_i = i \cdot h$, con i=0,1,2,….,100 y h=0.01

Para resolver este sistema de ecuaciones usando lo que conocemos sobre sistemas de ecuaciones. Vamos a aproximar la segunda derivada con una de la fórmulas vistas en clase

$$\frac{d^2x}{dt^2} \approx \frac{x(t+h) - 2x(t) + x(t-h)}{h^2}$$

Sustituimos esta fórmula en la ecuación diferencial, con lo que se obtiene:

$$\frac{x(t+h) - 2x(t) + x(t-h)}{h^2} \approx 4(x(t) - t)$$

Hacemos $t = t_i$. De acuerdo a esto $t + h = t_i + h = (i+1)h = t_{i+1}$ y $t - h = t_i - h = (i-1)h = t_{i-1}$.

Usemos la notación: $x_i \equiv x(t_i)$

- Con base en lo anterior, lo que tenemos ahora es lo siguiente:

$$\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{h^2} \approx 4(x_i - t_i)$$

Dejamos en la derecha solo el término $4t_i$. Lo que tenemos ahora es:

$$\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{h^2} - 4x_i \approx -4t_i$$

Si ahora multiplicamos a la ecuación por h^2 y reagrupamos se obtiene:

$$x_{i-1} + (-2 - 4h^2)x_i + x_{i+1} = -4t_i h^2$$

- En la ecuación anterior aparecen $x_{i-1},\ x_i \quad y \ x_{i+1}$
- La ecuación representa en realidad un sistema de ecuaciones lineales que va a permitirnos calcular una solución numérica de la ecuación diferencial.

Vamos a tomar i=1:

$$x_0 + (-2 - 4h^2)x_1 + x_2 = -4t_1h^2$$

Recordemos que $x_0 = x(0)$, que es una cantidad conocida ya que es una condición de frontera. En esta ecuación aparecen además $x_1 \ \ y \, x_2$, que por ahora son desconocidos.

Tomemos enseguida i=2

$$x_1 + (-2 - 4h^2)x_2 + x_3 = -4t_2h^2$$

En esta ecuación aparecen x_1 , $x_2 \ \ y \ \ x_3$, que son desconocidas.

Continuamos con i=3

$$x_2 + (-2 - 4h^2)x_3 + x_4 = -4t_3h^2$$

En esta ecuación aparecen x_2 , x_2 y x_4 , que son desconocidas.

………..

Continuamos con i=98

$$x_{97} + (-2 - 4h^2)x_{98} + x_{99} = -4t_{98}h^2$$

En esta ecuación aparecen x_{97} , x_{98} y x_{99} , que son desconocidas.

Y terminamos con i=99

$$x_{98} + (-2 - 4h^2)x_{99} + x_{100} = -4t_{99}h^2$$

En esta última ecuación $x_{100} = x(1)$, que es una cantidad conocida pues es una condición de frontera. Al final tenemos un sistema de 99 ecuaciones con 99 incógnitas.

- La matriz A es:

$$\begin{pmatrix} -2-4h^2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2-4h^2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2-4h^2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2-4h^2 \end{pmatrix}$$

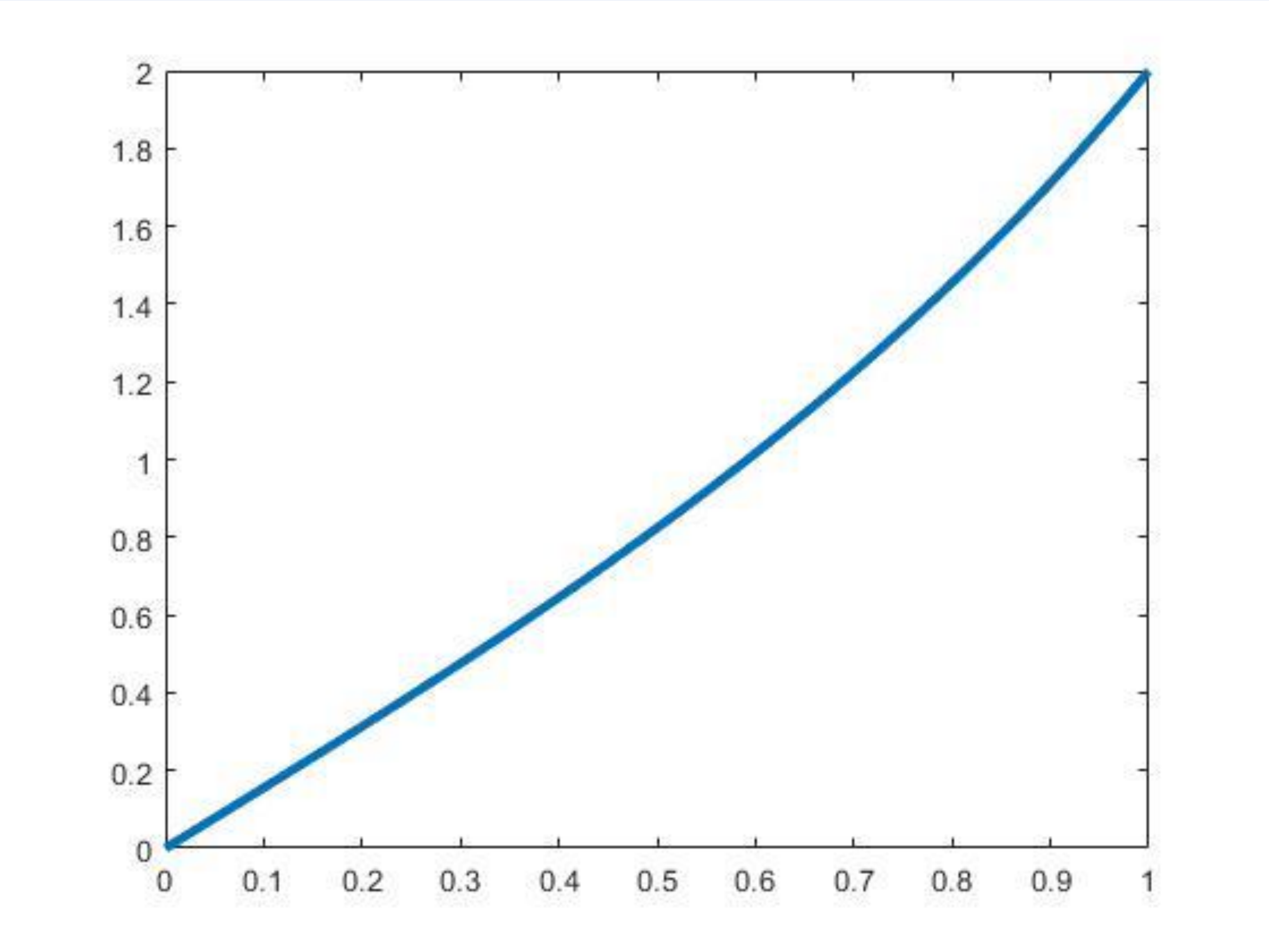
En cada fila hay como máximo tres elementos diferentes de cero, $a_{i,i-1}$, $a_i \quad y \;\; a_{i+1}$. En las filas 1 y n-1=99 hay solo dos elementos diferentes de cero.

- Por su parte el vector columna b (los términos independientes) es:

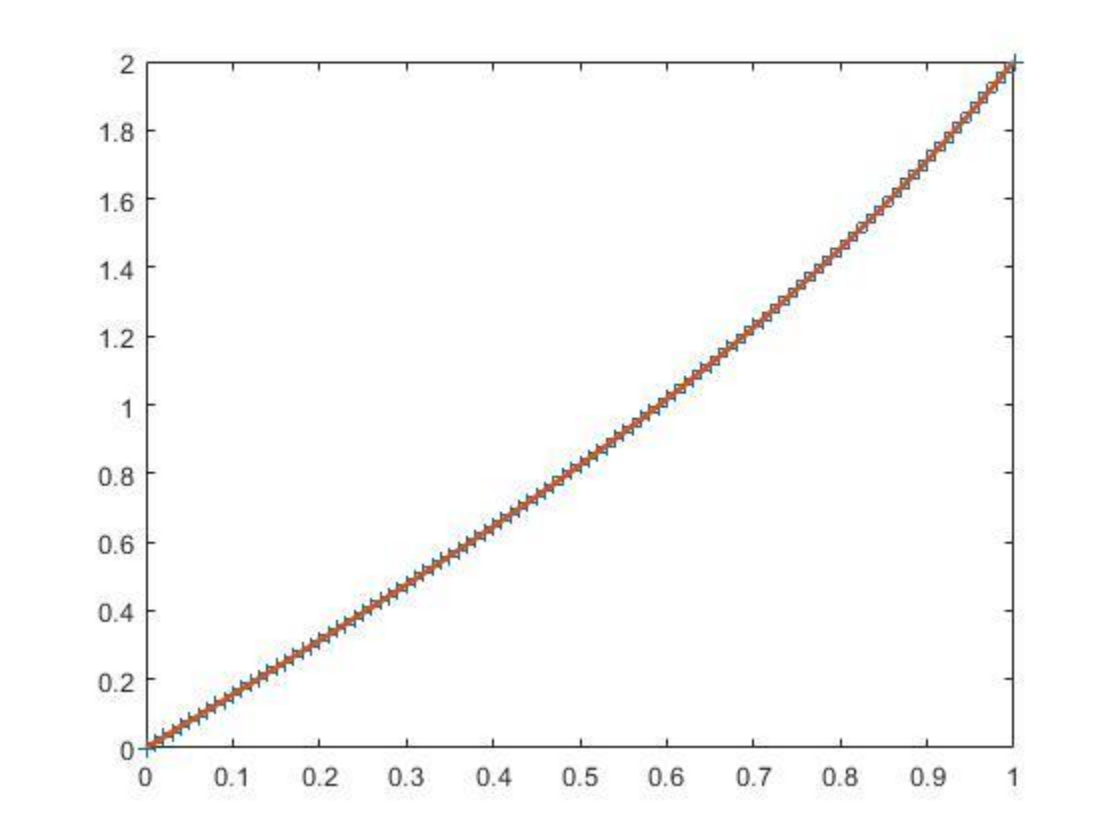
$$b = \begin{pmatrix} -x_0 - 4t_1h^2 \\ -4t_2h^2 \\ -4t_3h^2 \\ \dots \\ -4t_{98}h^2 \\ -x_{100} - 4t_{99}h^2 \end{pmatrix}$$

Tenemos un sistema de 99 ecuaciones lineales con 99 incógnitas. Lo vamos a resolver convirtiéndolo a triangular superior y luego usando el método de sustitución hacia atrás.

- La grafica de la solución numérica es:



- Comparación con la solución analítica



Solución analítica:

$$x(t) = \frac{e^2}{e^4 - 1}(e^{2t} - e^{-2t}) + t$$

- Resolver sistema de ecuaciones: Ax=b con

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 0 \\ -4 & -2 & 9 & 4 \end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Usando método de sustitución hacia adelante (también conocida como sustitución progresiva)

- Resolver sistema de ecuaciones Ax=b, donde

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & -4 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & 4 & -5 & 5 \end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \\ -9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Usando conversión a triangular superior y sustitución hacia atrás.

- Resolver sistema de ecuaciones Ax=b donde:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 6 & 2 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- Resolver sistema de ecuaciones Ax=b con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 5 & -7 \\ 3 & -2 & -1 & -6 \\ 4 & 8 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad y \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

i) Convirtiendo a triangular superior y usando método de sustitución hacia atrás

ii) Convirtiendo a triangular inferior y usando método de sustitución hacia adelante

iii) Aplicando sucesivamente conversión a triangular superior y conversión a triangular inferior

- Calcular la matriz inversa de A

Partimos de la matriz extendida AA

$$AA=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & -7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se realizan operaciones elementales en esta matriz hasta que la primera parte (columnas 1 a 4 en este caso) se convierte en la matriz identidad. La matriz inversa es la que aparece de la columnas n+1 a 2n

(en este caso de las columna 5 a 8)

- Un camino para lo anterior es convertir a triangular superior, luego a triangular inferior y finalmente hacer unos sobre la diagonal

- La matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2.4177 & 0.1013 & -0.5443 & -1.9620 \\ -2.3038 & -0.1645 & 0.7595 & 2.0633 \\ -0.5190 & 0.1772 & -0.2025 & 0.3164 \\ 2.0633 & 0.0759 & -0.6582 & -1.7215 \end{pmatrix}$$

- Si se tiene la matriz inversa de A, es posible resolver el sistema de ecuaciones:

$$A \cdot x = b$$

Si multiplicamos por la izquierda a esta ecuación por la inversa A^{-1} :

$$A^{-1} \cdot A \cdot x = I \cdot x = x = A^{-1} \cdot b$$

en donde I es la matriz identidad

Valores propios

- Determinar los valores y vectores propios de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & -4 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & 4 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

La ecuación a resolver es: $A \cdot x = \lambda x$

- Esto nos lleva a la siguiente ecuación:

$$(A - \lambda I) \cdot x = 0$$

Los valores de λ se obtienen como solución de la ecuación:

$$det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 0-\lambda & 4 & 1 & 3 & 7 \\ 2 & -3-\lambda & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3-\lambda & 4 & 5 \\ 6 & 8 & -4 & -2-\lambda & -1 \\ 3 & -3 & 4 & -5 & 5-\lambda \end{pmatrix} = 0$$