SPLINES CÚBICOS

TRAZADORES CÚBICOS

En este procedimiento de interpolación se ajusta un polinomio de grado tres cada dos puntos, o sea, dados los punto (x_i, y_i) , (x_{i+1}, y_{i+1}) , tendremos

$$y_i = a_i + b_i x_i + c_i x_i^2 + d_i x_i^3 \quad (1)$$

$$y_{i+1} = a_i + b_i x_{i+1} + c_i x_{i+1}^2 + d_i x_{i+1}^3 \quad (2)$$

Es claro que tenemos un par de ecuaciones con cuatro incógnitas, nos hacen falta ecuaciones para poder resolver el sistema. Usaremos entonces la continuidad de la derivada para lograr tener un sistema de ecuaciones adecuado. Con el fin de compactar notación, usaremos la siguiente:

El intervalo considerado es $x_i \leq x \leq x_{i+1}$

La longitud del intervalo es $h_i = x_{i+1} - x_i$

Hacemos un cambio de variable $s = x - x_i$

Entonces, el polinomio interpolante lo escribiremos de forma un poco diferente a las Ecuaciones (1), (2), pero manteniendo la misma esencia

$$g(s) = A_i + B_i s + C_i s^2 + D_i s^3 \quad (3)$$

Recordemos que suponemos que existe una función exacta que pasa por cada uno de los puntos (x_i, y_i) y que cumple con $f(x_i) = y_i$, entonces, $s=0$, significa $x=x_i$ y $s=h_i$ implica $x=x_{i+1}$, y entonces se satisface

$$y_i = A_i \quad (4)$$

$$y_{i+1} = A_i + B_i h_i + C_i h_i^2 + D_i h_i^3 \quad (5)$$

Para poder obtener las ecuaciones que hacen falta, vamos a pedir continuidad en la primera derivada. La primera y segunda derivada de $g(s)$ se escriben como

$$g'(s) = B_i + 2C_i s + 3D_i s^2 \quad (6)$$

$$g''(s) = 2C_i + 6D_i s \quad (7)$$

Evaluando la segunda derivada en $s=0$ y en $s=h_i$, tenemos

$$g''(0) = g''_i = 2C_i \quad (8)$$

$$g''(h_i) = g''_{i+1} = 2C_i + 6D_i h_i \quad (9)$$

Despejando C_i y D_i de las Ecuaciones (8) y (9), se tiene

$$C_i = \frac{g_i''}{2} \quad (10)$$

$$D_i = \frac{g_{i+1}'' - 2C_i}{6h_i} = \frac{g_{i+1}'' - g_i''}{6h_i} \quad (11)$$

Por lo cual la Ecuación (5) queda como

$$y_{i+1} = A_i + B_i h_i + C_i h_i^2 + D_i h_i^3 \quad (12)$$

Sustituyendo las expresiones para C_i y D_i y la expresión dada en la Ecuación (4), tenemos

$$y_{i+1} = y_i + B_i h_i + \frac{g_i''}{2} h_i^2 + \frac{g_{i+1}'' - g_i''}{6 h_i} h_i^3 \quad (13)$$

Simplificando y despejando B_i , tenemos

$$B_i = \frac{(y_{i+1} - y_i)}{h_i} - \frac{(g_{i+1}'' + 2g_i'')}{6} h_i \quad (14)$$

Por lo cual la Ecuación (3) queda como

$$g(s) = y_i + \left(\frac{(y_{i+1} - y_i)}{h_i} - \frac{(g_{i+1}'' + 2g_i'')}{6} h_i \right) s + \frac{g_i''}{2} s^2 + \frac{g_{i+1}'' - g_i''}{6 h_i} s^3 \quad (15)$$

La derivada de la Ecuación (15) es entonces

$$g'(s) = \left(\frac{(y_{i+1} - y_i)}{h_i} - \frac{(g_{i+1}'' + 2g_i'')}{6} h_i \right) + g_i'' s + \frac{g_{i+1}'' - g_i''}{2h_i} s^2 \quad (16)$$

Evaluamos esta derivada en $s=0$ ($x=x_i$) y $s=h_i$ ($x = x_{i+1}$), obteniendo

$$g'(0) = g_i' = \left(\frac{(y_{i+1} - y_i)}{h_i} - \frac{(g_{i+1}'' + 2g_i'')}{6} h_i \right) \quad (17)$$

$$g'(h_i) = g_{i+1}' = \frac{(y_{i+1} - y_i)}{h_i} + \frac{h_i}{6} [2g_{i+1}'' + g_i''] \quad (18)$$

Aquí hemos trabajado en el intervalo $x_i \leq x \leq x_{i+1}$. Si trabajamos en el intervalo $x_{i-1} \leq x \leq x_i$, entonces, la Ecuación (18) quedará como

$$g_i = \frac{(y_i - y_{i-1})}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}}{6} [2g_i'' + g_{i-1}''] \quad (19)$$

Pero como vamos a exigir continuidad en la derivada en cada punto donde se conecten dos cúbicas, entonces la Ecuación (17) debe ser igual a la Ecuación (19). Igualando y re-agrupando, obtenemos

$$\begin{aligned} & h_{i-1} g_{i-1}'' + (2h_{i-1} + 2h_i) g_i'' + h_i g_{i+1}'' = \\ & = 6 \left[\frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} - \left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} \right) y_i + \frac{y_{i+1}}{h_i} \right] \end{aligned} \quad (20)$$

Tenemos un sistema de $N-1$ ecuaciones con $N+1$ incógnitas, g_i , pues el índice i solo puede correr de 1 a $N-1$. La forma de resolver este problema, es dar los valores de g_0 y de g_N .