VALORES PROPIOS.

Se estudiará el problema

$$\mathbf{A}\,x = \lambda\,\mathbf{x} \qquad (VP-1)$$

Sea el siguiente sistema de ecuaciones

$$ax + by = 0 \qquad (VP-2)$$
$$cx + dy = 0 \qquad (VP-3)$$

Despejando x de la Ecuación (VP-2)

$$x = -\frac{b}{a}y$$

Sustituyendo en la Ecuación (VP-3), tenemos

$$cx+dy=c\left(-\frac{b}{a}y\right)+dy=0$$

Lo que es equivalente a

$$\left(-\frac{bc}{a}y\right)+dy=\left(-\frac{bc}{a}+d\right)y=\left(-\frac{bc}{a}+\frac{ad}{a}\right)y=0$$

Lo que nos lleva a

$$(ad-bc)y=0$$

Entonces, para que el sistema de ecuaciones anterior tenga solución diferente de la trivial, se debe tener que

$$ad - bc = 0$$

Pero esta cantidad es el determinante de la matriz

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Este comportamiento es muy general, pues si se tiene un sistema de ecuaciones del tipo

$$\mathbf{B}\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad (\mathrm{VP}-4)$$

Donde **B** es una matriz n x n

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & . & . & . & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & . & . & . & B_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ B_{n1} & B_{n2} & . & . & . & B_{nn} \end{pmatrix}$$

Y **x** es una matriz columna

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

Para que se tenga solución diferente de la trivial, se debe cumplir con que

$$\det(\mathbf{B})=0 \qquad (\mathrm{VP}-5)$$

Además, la solución no será única.

Volvamos a la Ecuación (VP-1), que al ser manipulada nos lleva a

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0} \qquad (\mathrm{VP}-6)$$

Para que es sistema tenga solución diferente de la trivial, se debe satisfacer

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0 \qquad (\mathrm{VP}-7)$$

De hecho, det(**A** – λ **I**) es un polinomio de grado n en λ, el llamado polinomio característico de la matriz **A**, o sea

$$f(\lambda)=\det(\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I}) \qquad (\mathrm{VP}-8)$$

El polinomio f(λ) es de la forma

$$f(\lambda)=c_0+c_1\lambda+c_2\lambda^2+c_3\lambda^3+......+c_n\lambda^n \qquad (\mathrm{VP}-9)$$

Este comportamiento nos lleva a poder diseñar el primer método para la obtención de los valores propios de una matriz **A.**

El procedimiento es el siguiente: se dará n+1 valores a λ y se evaluará $f(\lambda)$, entonces con los datos obtenidos, usando cualquier método de interpolación conocido, podemos ajustar un polinomio de grado n a esos n+1 puntos. Por ejemplo, podemos definir una $\Delta\lambda$ y después tomar $\lambda_0 =0$, $\lambda_1= \Delta\lambda$, $\lambda_2=2\Delta\lambda$, $\lambda_3=3\Delta\lambda$, …...$\lambda_n=n\Delta\lambda$, para posteriormente evaluar los determinantes dados por la Ecuación (VP-8), y por lo tanto tenemos un conjunto de puntos $\{ (\lambda_i , f(\lambda_i)), i=0,1,2\ldots...n\}$ y sobre este conjunto de puntos vamos a interpolar un polinomio de grado n, y por el teorema fundamenta del álgebra este polinomio corresponderá con el polinomio caracerístico de la matriz **A**. Una vez obtenido el polinomio bastará hallar las raices de dicho polinomio y esto nos dará los valores propios buscados, al satisfacer con esto la Ecuación (VP-7).

Veamos un ejemplo. Consideremos la matriz **A**

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

Elijamos $\Delta\lambda = 1$, entonces $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y ya tenemos todos los valores de λ. Entonces, tenemos

$$f(0)=\det\left|\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right|=(2)(-1)-(1)(1)=-3$$

$$f(1)=\det\left|\begin{pmatrix}2-1 & 1\\ 1 & -1-1\end{pmatrix}\right|=\det\left|\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\right|=-3$$

$$f(2)=\det\left|\begin{pmatrix} 2-2 & 1 \\ 1 & -1-2 \end{pmatrix}\right|=\det\left|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right|=-1$$

Entonces los puntos sobre los cuales vamos a realizar la interpolación son { (0, -3), (1, -3) , (2, -1) } . Usando la interpolación de Newton es fácil deducir que el polinomio interpolante para estos puntos es

$$f(\lambda)=-3-\lambda+\lambda^2$$

El mismo resultadose obtiene desarrollando la Ecuación (VP-8)

$$f(\lambda)=\det\left|\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}\right|=-(2-\lambda)(1+\lambda)-1=-(2+2\lambda-\lambda-\lambda^2)-1=$$

$$=-3-\lambda+\lambda^2$$